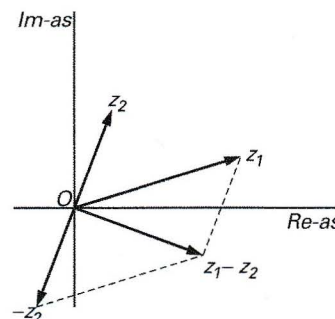
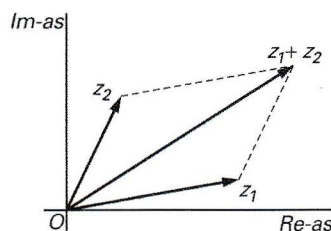


Figuur 3.2

Som van twee complexe getallen

Figuur 3.3

Verschil van twee complexe getallen

**Opgaven bij 3.4****1**

Bereken van de onderstaande getallen de toegevoegd complexe. Teken beide getallen in hetzelfde complexe vlak.

a $z = 4 - 2i$

c $z = -2i$

b $z = -2 - 5i$

d $z = 4$

2

Bereken en teken ter illustratie een figuur in het complexe vlak.

a $(1 + 2i) + (2 - i)$

c $(2 + i) + (-1 + i) + (3 - 3i)$

b $(-2 + 2i) - (4i)$

d $(-4 + 2i) - (-3 + i) - (2 - 2i)$

3.5 Complexe getallen in goniometrische vorm

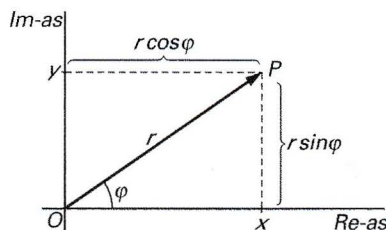
Het beeldpunt P van het complexe getal $z = x + iy$ kan in het complexe vlak worden vastgelegd door het geven van de rechthoekscoördinaten (x, y) of door het geven van de poolcoördinaten (r, φ) , zie figuur 3.4.

De straal r heet de *modulus* van z , notatie $r = |z|$, en is gelijk aan de lengte van het lijnstuk OP:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{stelling van Pythagoras}) \quad (3.8)$$

Figuur 3.4

De relatie tussen rechthoekscoördinaten en poolcoördinaten



De hoek φ heet het *argument* van $z = x + iy$, notatie $\varphi = \arg(z)$, en is de hoek (in radialen) die OP maakt met de positieve reële as. Er geldt:

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (3.9)$$

Het argument is op een veelvoud van 2π na bepaald. Als bijvoorbeeld het argument van een getal $\frac{1}{4}\pi$ is, dan heeft het ook de argumenten $\frac{1}{4}\pi + 2\pi, \frac{1}{4}\pi - 2\pi, \frac{1}{4}\pi + 4\pi$, enzovoort. We spreken voor de *hoofdwaarde* van het argument van z af:

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi.$$

Er geldt: $x = r \cos \varphi$ en $y = r \sin \varphi$

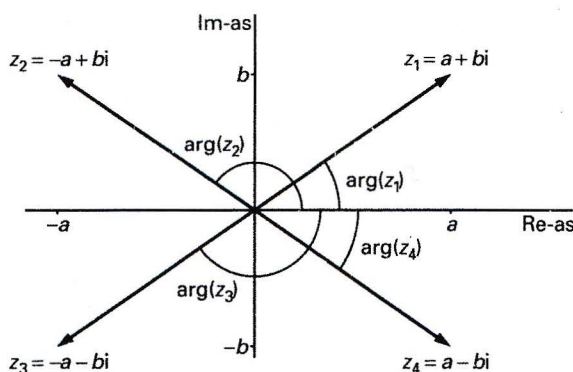
(zie figuur 3.4). Het getal $z = x + iy$ is dus ook te schrijven als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (3.10)$$

Formule (3.10) wordt de *goniometrische vorm* van z genoemd.

Voor het argument nemen we steeds de hoofdwaaarde. Het bepalen van de modulus levert geen problemen op; het bepalen van het argument gaan we nader bekijken.

Figuur 3.5
Bepaling van de
hoofdwaaarde



We onderscheiden drie gevallen, zie figuur 3.5. In deze figuur zijn de reële getallen a en b positief.

- 1 Als het complexe getal in het eerste of in het vierde kwadrant ligt, dan is het argument direct met de arctangens te berekenen. Immers de waarde van een arctangens levert een hoek op tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$.

Het argument van $z_1 = a + bi$ is $\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Het argument van $z_4 = a - bi$ is $\arg(z_4) = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right)$.

- 2 Voor een getal in het tweede kwadrant kunnen we het argument berekenen door eerst het argument te berekenen van zijn gespiegelde in de oorsprong en er daarna π bij op te tellen:

$$\begin{aligned} \arg(z_2) &= \arg(-a + bi) \\ &= \arg(a - bi) + \pi \\ &= \arctan\left(\frac{-b}{a}\right) + \pi \\ &= \arg(z_4) + \pi \end{aligned}$$

Op deze manier krijgen we de hoofdwaaarde van het argument van z_2 .

- 3 Voor een getal in het derde kwadrant kunnen we het argument berekenen door eerst het argument te berekenen van zijn gespiegelde in de oorsprong en er daarna π van af te trekken:

$$\begin{aligned} \arg(z_3) &= \arg(-a - bi) = \arg(a + bi) - \pi \\ &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi \\ &= \arg(z_1) - \pi \end{aligned}$$

Op deze manier krijgen we de hoofdwaaarde van het argument van z_3 . In het algemeen is het verstandig om het argument te bepalen door eerst het getal in het complexe vlak te tekenen en daarna met behulp van deze figuur het argument te berekenen.

Het argument van getallen op de assen van het complexe vlak kunnen we direct aflezen, zie voorbeeld 10. In de voorbeelden 7 tot en met 10 bepalen we steeds de goniometrische vorm van het gegeven complexe getal. Teken zelf steeds het getal in het complexe vlak.

Voorbeeld 7

Gegeven $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Het getal ligt in het vierde kwadrant.

$$\begin{aligned} \text{Uit } |z| &= \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{ en } \arg(z) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{1}{3}\pi \text{ volgt} \\ z &= 2\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right). \end{aligned}$$

Voorbeeld 8

Gegeven $z = -2 + 3i$.

Het getal ligt in het tweede kwadrant, zodat we het argument niet direct met een arctangens kunnen berekenen.

$$\begin{aligned} \text{Uit } |z| &= \sqrt{13} \text{ en } \arg(z) = \arg(2 - 3i) + \pi = \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) + \pi \approx 2,159 \text{ volgt} \\ z &= \sqrt{13}(\cos(2,159) + i \sin(2,159)). \end{aligned}$$

Voorbeeld 9

Gegeven $z = -6 - 8i$. Het getal ligt in het derde kwadrant.

$$\begin{aligned} \text{Uit } |z| &= 10 \text{ en } \arg(z) = \arg(6 + 8i) - \pi \approx -2,214 \text{ volgt} \\ z &= 10(\cos(-2,214) + i \sin(-2,214)). \end{aligned}$$

Voorbeeld 10

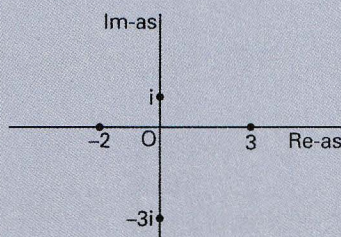
De goniometrische vorm van een complex getal op een as volgt direct uit een tekening. We bepalen de goniometrische vorm van de getallen 3, -2 , i en $-3i$ (zie figuur 3.6).

Het getal 3 heeft de modulus 3 en het argument 0. De goniometrische vorm is dus $3 = 3(\cos(0) + i \sin(0))$.

Op overeenkomstige wijze vinden we:

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi); i = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \text{ en}$$

$$-3i = 3\left(\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)\right)$$



Figuur 3.6

atie bij voorbeeld 10

Opdrachten

Bepaal de goniometrische vorm van:

- $z = -3 + 2i$
- $z = 1 - 6i$
- $z = -6i$

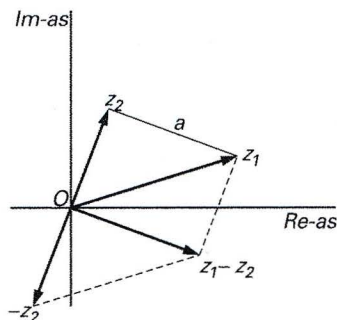
Afstand tussen twee complexe getallen

In figuur 3.7 is de lengte van het lijnstuk a de afstand tussen z_1 en z_2 . Uit de figuur blijkt dat de lengte van het lijnstuk a gelijk is aan de modulus van $z_1 - z_2$, zodat $|z_1 - z_2|$ de afstand is tussen z_1 en z_2 . Voor $|z|$ kunnen we schrijven $|z - 0|$: de modulus van z is de afstand van het beeldpunt van z tot de oorsprong van het assenstelsel.

Deze afstand tussen twee complexe getallen wordt vaak gebruikt bij het tekenen van verzamelingen in het complexe vlak.

Figuur 3.7

Afstand tussen twee
complexe getallen

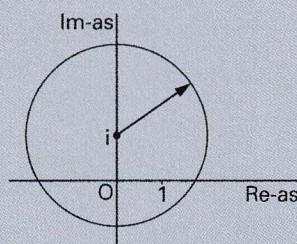


Voorbeeld 11

Teken in het complexe vlak de verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 2\}$.

Oplossing

Dit lezen we als: teken alle complexe getallen, waarvoor geldt dat de afstand tot i is gelijk aan 2. Deze verzameling is een cirkel in het complexe vlak met middelpunt $(0,1)$ en straal 2, zie figuur 3.8.

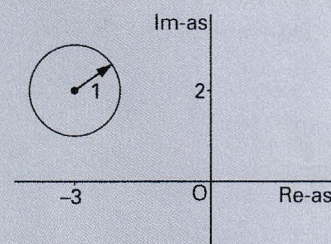


Figuur 3.8

Illustratie bij voorbeeld 11

Figuur 3.9

Illustratie bij voorbeeld 12



Voorbeeld 12

Teken in het complexe vlak de verzameling $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 - 2i| = 1\}$.

Oplossing

We schrijven $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3 - 2i| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - (-3 + 2i)| = 1\}$. Dit laatste lezen we als: teken alle complexe getallen, waarvoor geldt dat de afstand tot $-3 + 2i$ is gelijk aan 1. Deze verzameling is een cirkel in het complexe vlak, zie figuur 3.9.

Een andere methode is $z = x + iy$ te substitueren in $|z + 3 - 2i| = 1$. Deze substitutie levert dan een relatie tussen x en y , waarna we elke $z = x + iy$ kunnen tekenen die voldoet aan $|z + 3 - 2i| = 1$.

De substitutie levert op:

$$|(x + 3) + i(y - 2)| = 1; \text{ hieruit volgt } \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2} = 1, \text{ zodat } (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Dit is weer de vergelijking van een cirkel in het complexe vlak met middelpunt $(-3, 2)$ en straal 1.

Opdracht

Teken in het complexe vlak de verzameling

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| \leq 3 \wedge -\frac{1}{4}\pi \leq \arg(z) \leq \frac{1}{2}\pi\right\}.$$

Opgaven bij 3.5

1

Schrijf in de goniometrische vorm.

a $z = -3 - 3i$

d $z = -3 + 4i$

b $z = 2 + 2i\sqrt{3}$

e $z = -2 - 3i$

c $z = -4i$

f $z = -12 + 5i$

2

Schrijf in de vorm $x + iy$.

a $z = 3\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right)$

c $z = 4\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)$

b $z = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

d $z = 5(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

3 Teken in het complexe vlak de volgende verzamelingen.

- a $\{z \in \mathbb{C} | 1 \leq |z + 2 - i| \leq 2\}$
- b $\{z \in \mathbb{C} | |z + 1 - 2i| = |z - 3|\}$
- c $\{z \in \mathbb{C} | z + \bar{z} = z \cdot \bar{z}\}$
- d $\left\{z \in \mathbb{C} | 1 \leq |z| < 3 \wedge -\frac{1}{4}\pi \leq \arg(z) < \frac{3}{4}\pi\right\}$
- e $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = -\operatorname{Im}(z)\}$
- f $\left\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 2 \wedge -\frac{1}{4}\pi \leq \arg(z) < \frac{1}{3}\pi\right\}$

3.6 Het rekenen met complexe getallen in de goniometrische vorm

Het zal blijken dat het vermenigvuldigen en delen van twee complexe getallen met de goniometrische vorm vaak gemakkelijker gaat dan met de vorm $x + iy$. Het optellen en aftrekken van complexe getallen wordt wel altijd met de vorm $x + iy$ uitgevoerd.

Stel $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ en $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. We berekenen $z_1 \cdot z_2$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \left((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) \right) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (3.11)$$

De laatste vorm stelt voor een complex getal met modulus $r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$ en argument $\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, zodat $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$ en $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

Aangetoond is nu:

Het product van twee complexe getallen in goniometrische vorm is een complex getal waarvan de modulus gelijk is aan het product van de moduli en waarvan het argument gelijk is aan de som van de argumenten. Het argument van het product hoeft geen hoofdwaarde meer te zijn, zodat we dit eventueel moeten herleiden naar de hoofdwaarde.

Voorbeeld 13

We willen het product van $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ en $z_2 = \sqrt{3} + i$ bepalen met behulp van de goniometrische schrijfwijze.

Oplossing

Eerst bepalen we de goniometrische vorm van z_1 en z_2 en daarna $z_1 \cdot z_2$ met behulp van formule (3.11).

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right) \text{ en } z_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \right) \quad (\text{Ga dit na!})$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 2 \left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{6}\pi\right) \right) \\ &= 4 \left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) \right) = -2\sqrt{3} + 2i \end{aligned}$$

Opdracht

Los op in $\mathbb{C}$ de vergelijking $x^2 + 9 = 0$.

We geven nog een voorbeeld van het oplossen van vergelijkingen met behulp van het getal i .

Voorbeeld 1

Los op in $\mathbb{C}$ de vergelijking $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Oplossing

Kwadraatafsplitsen levert:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + 9 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (3i)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1-3i)(x-1+3i) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1+3i \vee x = 1-3i\end{aligned}$$

De oplossingen van de vergelijking van de opdracht hierboven zijn $x = 3i$ en $x = -3i$. We noemen deze oplossingen *imaginaire getallen*. Een imaginair getal is het product van een reëel getal met de imaginaire eenheid i , anders gezegd: als $a \in \mathbb{R}$ dan is ai een imaginair getal.

De oplossingen van de vergelijking van voorbeeld 1 zijn $x_1 = 1 - 3i$ en $x_2 = 1 + 3i$. Dit zijn voorbeelden van *complexe getallen*.

Een complex getal wordt vaak aangegeven met de letter z ; een complex getal ziet er dus als volgt uit:

$$z = x + iy \tag{3.2}$$

waarbij x en y reële getallen zijn en i de imaginaire eenheid is.

We noemen x het *reële deel* van z en y het *imaginaire deel* van z ; in formulevorm:

$$x = \operatorname{Re}(x + iy) (= \operatorname{Re}(z)) \text{ en } y = \operatorname{Im}(x + iy) (= \operatorname{Im}(z)) \tag{3.3}$$

Voor $x + 0i$ schrijven we x : een reëel getal. Voor $0 + iy$: een imaginair getal.

De verzameling van alle complexe getallen geven we aan met $\mathbb{C}$.

Twee complexe getallen $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ zijn *gelijk*, notatie $z_1 = z_2$, als geldt $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ én $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$, dat wil zeggen $a = c$ en $b = d$.

Is $z = x + iy$, dan is het *toegevoegd complexe getal* van z (ook wel *complex geconjugeerde* van z) notatie $\bar{z}$, het getal $\bar{z} = x - iy$ (3.4)

Opdrachten

Bereken het toegevoegd complexe getal van z als:

- $z = -1 + 3i$
- $z = 2 - 5i$